Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

HOJA DE PROBLEMAS: ESPACIOS VECTORIALES

1. Supongamos que una molécula de metano, en estado de equilibrio, tiene sus cuatro hidrógenos en las posiciones $r_1 = (a, a, a)$, $r_2 = (a, -a, -a)$, $r_3 = (-a, a, -a)$, $r_4 = (-a, -a, a)$, con el carbono en el centro. El momento dipolar de cada enlace viene dado por $\mu_i = \kappa r_i$, $1 \leq i \leq 4$, con κ una constante. Calcula el momento dipolar total $\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i$.

2. Comprobar si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los espacios vectoriales correspondientes, hallando en cada caso el rango del sistema:

   a) $\{(1,1,1), (1,2,1), (1,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   b) $\{(1,2,3,0), (4,3,4,-16), (7,3,4,5)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   c) $\{(1,0,0,-1), (2,1,1,-2), (0,1,1,0), (1,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   d) $\{(4,-5,7), (3,3,4), (1,1,-2), (2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   e) $\{(1,i,2), (0,1,-2i), (3,1,5)\}$ de $\mathbb{C}^3$.
   f) $\{(1,0,-1), (i,2,0), (1,-2i,0)\}, (0,2i,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$.
   g) $\{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ de $\mathcal{P}_2 = \{$polinomios de grado menor o igual que $2\}$.
   h) $\{(2,0,0), (3,2,0), (4,3,x)\}$ $(x \in \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^3$.

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}$.
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$.
   (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

4. Consideremos la base $B = \{(1,-1), (2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se pide:

   (a) Dibuja la base B.
   (b) Hallar $(5,3)_B$.
   (c) Si C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ hallar las matrices cambio de base $M_{B \to C}$ y $M_{C \to B}$.

5. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(0,2), (1,3)\}$ y $B' = \{(1,1), (1,-1)\}$. Se pide:

   (a) Dibuja las bases B y B'.
   (b) Hallar las matrices cambio de base de B a B' y de B' a B, así como las ecuaciones del cambio de base de B a B' y de B' a B.
   (c) Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que $u_B = (-3,5)$ y $v_{B'} = (0,2)$, hallar $u_{B'}$ y v_B.

6. **Cambios de coordenadas habituales en Física.** Además de las coordenadas *cartesianas* (que son coordenadas o componentes de un vector en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$), es muy habitual en Física usar las coordenadas *polares*, las *cilíndricas* y las *esféricas*. El objetivo de este ejercicio es estudiar con cierto detalle estos tres últimos sistemas de referencia (o bases de $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$) y su relación con las coordenadas cartesianas.

(a) **Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.** Las coordenadas polares representan cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ a través de dos números: ρ, que mide la longitud (o módulo) de $\vec{v}$, y θ que representa el ángulo que forma $\vec{v}$ con el eje OX. Las coordenadas polares y cartesianas están relacionadas por medio de las expresiones

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Lógicamente (ρ, θ) son coordenadas en una base de $\mathbb{R}^2$. Esta base, que llamaremos base de coordenadas polares, está formada por dos vectores $\mathcal{B} = \{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta\}$. $\vec{e}_\rho$ es un vector unitario (módulo 1) en dirección radial, y $\vec{e}_\theta$ es un vector, también unitario, tangente a la circunferencia de centro $(0,0)$ y que pasa por el punto (o vector) de coordenadas cartesianas (x, y). Se pide:

(a1) Representa gráficamente la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y la base de coordenadas polares $\mathcal{B} = \{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta\}$.

(a2) Denotemos por $C = \left\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Deduce las siguientes relaciones que nos dan el cambio de coordenadas entre cartesianas y polares y viceversa:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_\theta \end{cases}$$

(b) **Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.** Las coordenadas cilíndricas son como las polares pero en dimensión 3. Aparece una tercera coordenada z que coincide con la coordenada cartesiana z de modo que si denotamos por $C = \left\{\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y por $\mathcal{B} = \{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ la base de coordenadas cilíndricas, entonces $\vec{e}_\rho$ y $\vec{e}_\theta$ son como en las polares y $\vec{e}_z = \vec{k}$. Se pide:

(b1) Dibuja los vectores de las coordenadas cilíndricas y comprueba que

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases}$$

(c) **Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$.** La idea de las coordenadas esféricas es considerar el vector de coordenadas cartesianas (x, y, z) como un punto de la superficie de una esfera centrada en $(0,0,0)$, de radio ρ, de longitud θ y latitud ϕ. Estas nuevas coordenadas (ρ, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas y están relacionadas con las cartesianas por medio de las relaciones

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Hay varias formas de seleccionar el origen para los ángulos θ y ϕ. En nuestro caso, θ es un ángulo que varía entre 0 y 2π, tiene su origen en el eje OX y se recorre en sentido antihorario. Por su parte, ϕ varía entre 0 y π y tiene su origen en el *polo norte*. Se recorre desde polo norte a polo sur. Los vectores de la base de coordenadas esféricas $\mathcal{B} = \{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ son todos ellos unitarios, $\vec{e}_\rho$ tiene la dirección radial, $\vec{e}_\theta$ es tangente al paralelo que pasa por el punto (x, y, z) y $\vec{e}_\phi$ es tangente al meridiano que pasa por dicho punto. Se pide:

(c1) Dibuja la base de coordenadas esféricas $\mathcal{B} = \{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ y las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ).

(c2) Deduce que

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \sin\phi\cos\theta\vec{i} + \sin\phi\sin\theta\vec{j} + \cos\phi\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\phi = \cos\phi\cos\theta\vec{i} + \cos\phi\sin\theta\vec{j} - \sin\phi\vec{k} \end{cases}$$

y encuentra el cambio inverso.

7. **Un Espacio de Elementos Finitos.** Fijemos un número natural positivo $N \in \mathbb{N}$ y sea $h = \frac{1}{N+1}$. Consideremos ahora los nodos $c_j = jh$, con $j = 0, 1, \cdots, N+1$, los cuales nos permiten escribir el intervalo $[0,1]$ en la forma

$$[0,1] = \bigcup_{j=0}^{N} [c_j, c_{j+1}].$$

Definimos el conjunto de funciones

$$V_h = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u \text{ es continua, } u(0) = u(1) = 0 \text{ y además } u|_{[c_j, c_{j+1}]} \in \mathcal{P}_1\}$$

donde $\mathcal{P}_1$ son los polinomios de grado menor o igual a 1. Es fácil comprobar que V_h, con la suma habitual de funciones y el producto por escalares (números reales) es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial. Finalmente, consideremos el conjunto de funciones

$$\mathcal{B} = \{\phi_j : [0,1] \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N, \text{ con } \phi_j \in V_h \text{ tales que } \phi_j(c_i) = 1 \text{ si } i = j, \text{ y } \phi_j(c_i) = 0 \text{ si } i \neq j\}.$$

Se pide:

(a) Dibuja las funciones ϕ_j, para $j = 1, 2, \cdots, N$.

(b) Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de V_h.

Las funciones ϕ_j se llaman funciones de forma y el espacio V_h espacio de elementos finitos de Lagrange de tipo P_1. Este espacio de funciones es muy utilizado en Cálculo de Estructuras y en Mecánica de Fluidos, entre otros campos de la Ingeniería, para resolver numéricamente algunas de las ecuaciones (diferenciales) que aparecen en dichos campos.

8. Hallar una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

   a) $W_1 =< (2, -1, 0, 1), (-2, 1, -3, 2) >$.

   b) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, y - z = 0\}$.

   c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\}$.

   d) $W_4 : \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{array} \right.$

   e) $W_5 =< (1, -1, 0, 1), (2, -1, 0, 2), (-1, 2, 0, -1) >$.

9. Determinar unas ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

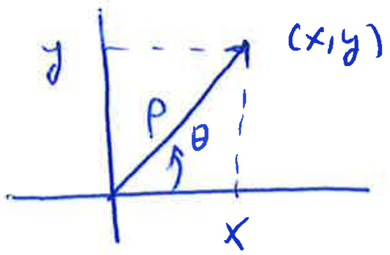
$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0, x + 2y - z = 0\} \text{ y } W =< (1, -1, 0, 3), (2, 1, -1, 2) >,$$

así como también de $U \cap W$ y de $U + W$. Concluir si la suma es directa o no

Hoja de Problemas. Espacios Vectoriales

(6) Cambios de coordenadas habituales en Física.

Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.



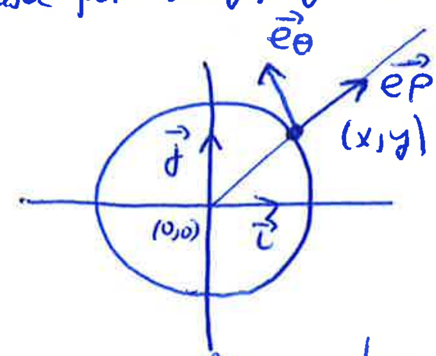
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{array}$$

Base de coordenadas polares $B = \{ \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta \}$

" " " cartesianas $B' = \{ \vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1) \}$

$\vec{e}_\rho$ vector unitario en dirección radial

$\vec{e}_\theta$ " " tangente (en sentido antihorario) a la circunferencia que pasa por (x,y) y tiene centro $(0,0)$



La recta que une los puntos $(0,0)$ y (x,y) tiene la forma

$$\gamma(\rho) = \rho\cos\theta\, \vec{i} + \rho \operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \quad , \text{ con } \theta \text{ fijo.}$$

La tangente a dicha recta se calcula como

$$\frac{d\gamma}{d\rho} = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j}$$

Como este vector es unitario pues $\left\| \frac{d\gamma}{d\rho} \right\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$

Por tanto $\vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j}$.

. Por su parte, la circunferencia que pasa por (x,y) y de centro $(0,0)$ viene dada por

$$\gamma(\theta) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}$$

Su tangente es

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j}$$

El módulo de este vector ~~es~~ es

$$\left\|\frac{d\gamma}{d\theta}\right\| = \sqrt{(-\rho\,\mathrm{sen}\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2} = \sqrt{\rho^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)} = \rho$$

Así,

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{d\gamma}{d\theta}}{\left\|\frac{d\gamma}{d\theta}\right\|} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}.$$

En resumen,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

y por tanto, la matriz de cambio de base de polares a cartesianas viene dada por

$$M_{\text{polares}\to\text{cartesianas}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

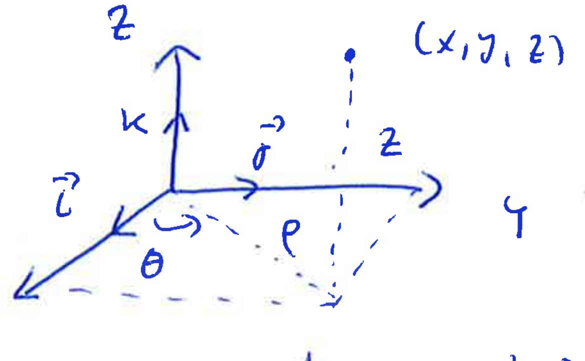
No es difícil comprobar que

$$M_{\text{cartesianas}\to\text{polares}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

La coordenadas cilíndricas son las polares a cada altura z.



Base de coordenadas cartesianas $\{\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)\}$

" " " cilíndricas $\{\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z=\vec{k}\}$

$$M_{\text{cilíndricas}\to\text{cartesianas}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

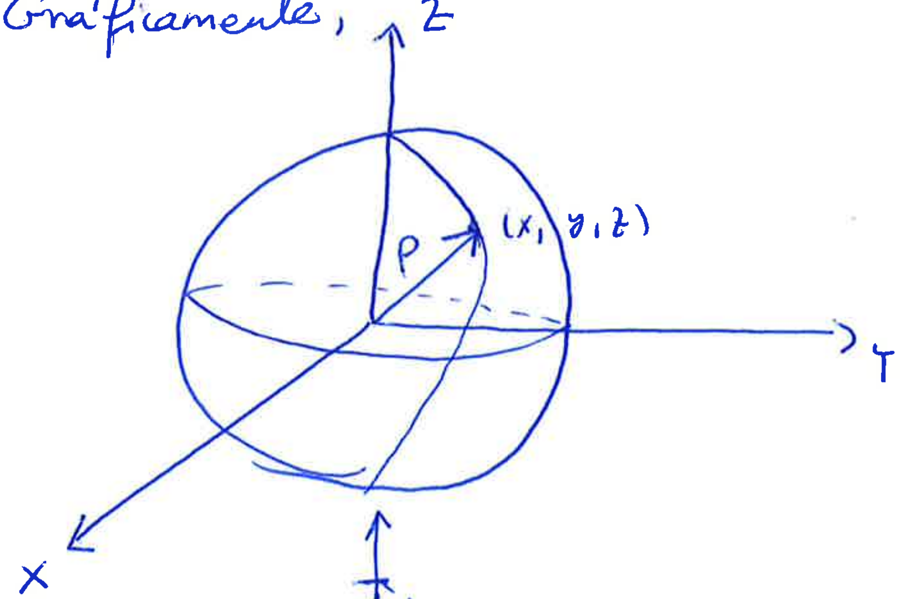
Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$

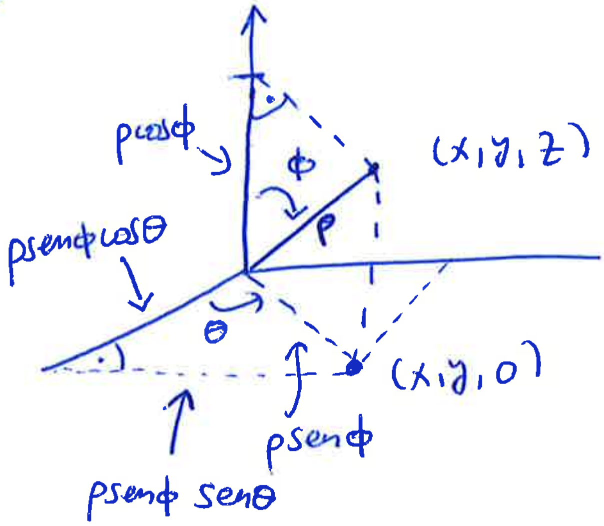
La idea de las coordenadas esféricas consiste en considerar cada punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ como un punto situado en la superficie de una esfera de radio ρ.

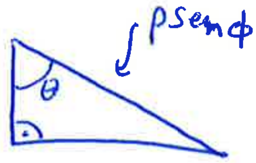
Las variables esféricas son (ρ,θ,ϕ). donde

ρ es el radio de la esfera, y θ, ϕ son longitud y latitud.

Gráficamente,







$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}$$

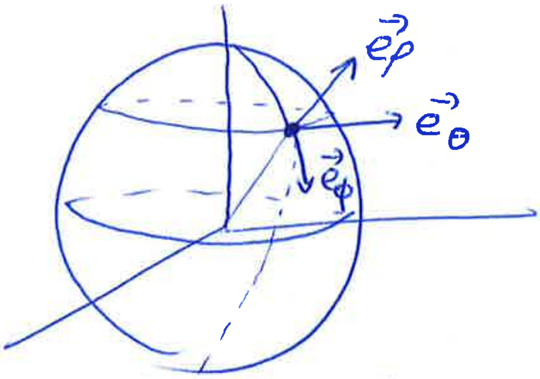
Denotamos por $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ los vectores asociados a las ~~nuevas coo~~ coordenadas esféricas. Se definen como:

$\vec{e}_\rho \equiv$ vector unitario en dirección radial

$\vec{e}_\theta =$ " " tangente al meridiano que pasa por (x, y, z)

$\vec{e}_\phi =$ " " " " paralelo " " "

Gráficamente,



La relación de estos tres vectores con los vectores de las coordenadas cartesianas se obtiene de manera similar al caso de las coordenadas polares:

$\underline{\vec{e_\rho}:}$ $\quad \gamma(\rho) = \rho\cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j} + \rho\cos\phi\,\vec{k}$

$$\frac{d\gamma}{d\rho} = \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j} + \cancel{\rho\,\text{sen}} + \cos\phi\,\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\gamma}{d\rho}\right\| = \sqrt{(\cos\theta\,\text{sen}\phi)^2 + (\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi)^2 + \cos^2\phi} = 1$$

$$\vec{e_\rho} = \frac{d\gamma/d\rho}{\|d\gamma/d\rho\|} = \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k}$$

$\vec{e_\theta}:$ $\quad \gamma(\theta) = \rho\cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j} + \rho\cos\phi\,\vec{k}$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j}$$

$$\left\|\frac{d\gamma}{d\theta}\right\| = \sqrt{(-\rho\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta)^2 + (\rho\cos\theta\,\text{sen}\phi)^2} = \rho\,\text{sen}\phi$$

pues $0 \le \phi \le \pi$.

$$\vec{e_\theta} = \frac{\frac{d\gamma}{d\theta}}{\left\|\frac{d\gamma}{d\theta}\right\|} = -\text{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$\vec{e_\phi}:$ $\quad \gamma(\phi) = \rho\cos\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\vec{j} + \rho\cos\phi\,\vec{k}$

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = \rho\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\theta\cos\phi\,\vec{j} - \rho\,\text{sen}\phi\,\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\gamma}{d\phi}\right\| = \sqrt{(\rho\cos\theta\cos\phi)^2 + (\rho\,\text{sen}\theta\cos\phi)^2 + (-\rho\,\text{sen}\phi)^2} = \rho$$

$$e_\phi = \frac{d\gamma/d\phi}{\|d\gamma/d\phi\|} = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \text{sen}\theta\cos\phi\,\vec{j} - \text{sen}\phi\,\vec{k}.$$

De esta forma, la matriz de cambio de base es

$$M_{\text{esféricas} \to \text{cartesianas}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \,\text{sen}\phi & -\text{sen}\theta & \cos\phi \cos\theta \\ \text{sen}\theta \,\text{sen}\phi & \cos\theta & \cos\phi \,\text{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\text{sen}\phi \end{pmatrix}$$

9) $\mathcal{U} = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z-t=0, \; x+2y-z=0 \}$

$W = \langle (1,-1,0,3), (2,1,-1,2) \rangle$

Estudio de $\mathcal{U}$:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z-t=0 \\ x+2y-z=0 \end{matrix}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

~~$r(A)=2 \to 2$ pará~~

$r(A) = 2 = r(A|b) < 4 = $ nº incógnitas $\to$ 2 parámetros.

$t = \alpha \qquad z = \beta$

$$\left.\begin{matrix} x+y = \alpha - \beta \\ x+2y = \beta \end{matrix}\right\} \quad y = -\alpha + 2\beta$$

$\Downarrow$

$x = -y + \alpha - \beta$

$= \alpha - 2\beta + \alpha - \beta$

$= 2\alpha - 3\beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{U} = 2$, Base de $\mathcal{U}$, $B_{\mathcal{U}} = \{(2,-1,0,1), (-3,2,1,0)\}$

<u>Estudio de W:</u>

Ecuaciones paramétricas de W:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + 2\beta \\ y &= -\alpha + \beta \\ z &= -\beta \\ t &= 3\alpha + 2\beta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \alpha - 2z \\ y &= -\alpha - z \\ t &= 3\alpha - 2z \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} x + y &= -3z \\ \cancel{y+}\, t + 3y &= -5z \end{aligned} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 3y + 5z + t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ecuaciones implícitas de W.

<u>Estudio de $\mathcal{U} \cap W$:</u> ecuaciones implícitas

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - t &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ 3y + 5z + t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss.

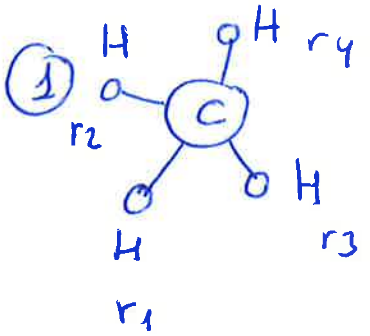
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & +3 & 0 \\ 0 & 3 & +5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2\cancel{-4} & 1 \\ 0 & 3 & +5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & +5 & 1 \\ 0 & 0 & 2\cancel{-4} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \overset{\cancel{-4}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4 + 4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

1)



Momento dipolar de un enlace $\mu_i = k r_i$, k = cte

Momento dipolar total

$$\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i = \sum_{i=1}^{4} k r_i = k\{(a,a,a)+(a,-a,-a)+(-a,a,-a)+(-a,-a,a)\}$$
$$= 0.$$

2 f) $\{(1,0,-1), (i,2,0), (1,-2i,0), (0,2i,-1)\}$

Dependencia y/o independencia lineal:

$$\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(i,2,0)+\lambda_3(1,-2i,0)+\lambda_4(0,2i,-1)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2i\lambda_3 + 2i\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 2i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 2i \\ 0 & i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 2i F_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 2i \\ 0 & -2 & 2i & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2i & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2 = r(A|b) < 4 =$ nº de incógnitas $\to$ S.C.I.

La solución depende de 2 parámetros.

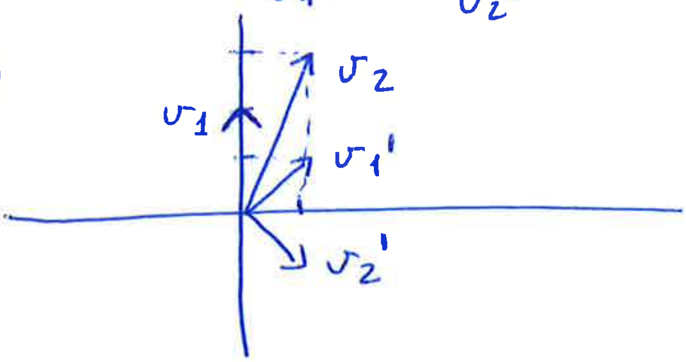
Los vectores son linealmente dependientes.

5

$$B = \{ \overbrace{(0,2)}^{v_1}, \overbrace{(1,3)}^{v_2} \}$$

$$B' = \{ \underbrace{(1,1)}_{v_1'}, \underbrace{(1,-1)}_{v_2'} \}$$

a)



b) $v_1 = a_{11} v_1' + a_{21} v_2'$;

$$(0,2) = a_{11}(1,1) + a_{21}(1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{11} + a_{21} \\ 2 = a_{11} - a_{21} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow a_{11} = -a_{21} \quad \rightarrow a_{11} = 1 \\ 2 = -a_{21} - a_{21} = -2a_{21} \rightarrow a_{21} = -1 \end{array}$$

$$M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = a_{12} v_1' + a_{22} v_2'$$

$$(1,3) = a_{12}(1,1) + a_{22}(1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a_{12} + a_{22} \\ 3 = a_{12} - a_{22} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 = 2a_{12} \rightarrow a_{12} = 2 \\ a_{22} = 1 - a_{12} = -1 \end{array}$$

$$M_{B' \to B} = \left(M_{B \to B'} \right)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{B'} = M_{B \to B'} v_B \\ v_B = M_{B' \to B} v_{B'} \end{array}\right\} \text{ ecuaciones de cambio de base.}$$

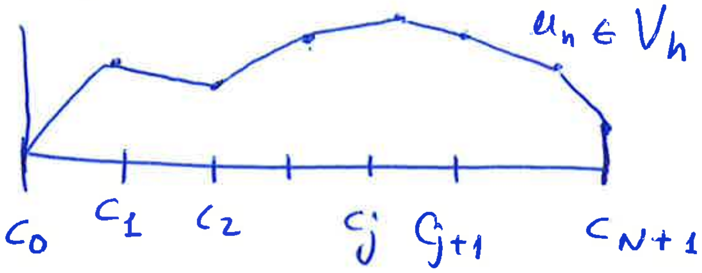
c) $u_B = (-3, 5)$

$$u_{B'} = M_{B \to B'} u_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$v_{B'} = (0, 2)$

$$v_B = M_{B' \to B} v_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(7) Un espacio de Elementos Finitos.



$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N+1}$

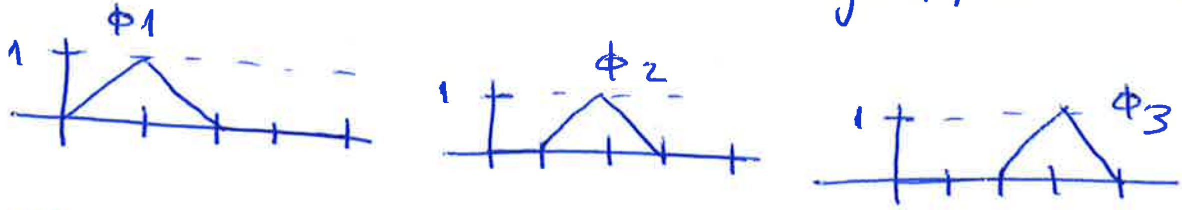
$$h = c_{j+1} - c_j = \frac{1}{N+1}.$$

$$V_h = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R} : u \text{ continua}, \ u(0) = u(1) = 0 \text{ y además } u\big|_{[c_j, c_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \}.$$

$\mathbb{P}_1 \equiv$ polinomios de grado ≤ 1

$$\mathcal{B} = \{ \phi_j : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \phi_j \in V_h, \ \phi_j(c_i) = 1 \text{ si } i = j, \ \phi_j(c_i) = 0 \text{ si } i \neq j \}.$$

a)



(b) $\mathcal{B}$ es una base de V_h.

$\mathcal{B}$ es libre

$$\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0$$

Particularizamos la identidad anterior en el nodo c_j

$$\lambda_1 \underbrace{\phi_1(c_j)}_{0} + \lambda_2 \underbrace{\phi_2(c_j)}_{0} + \dots + \lambda_j \underbrace{\phi_j(c_j)}_{1} + \dots + \lambda_n \underbrace{\phi_n(c_j)}_{0} = 0$$

$$\lambda_j = 0.$$

$\mathcal{B}$ es generador de V_h. En efecto, sea $u_h \in V_h$.

y sean $u^j = u_h(c_j)$. Entonces

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u^j \phi_j(x).$$

ya que

$$u_h(c_i) = \sum_{j=1}^{N} u_h^j \phi_j(c_i) = u_h^i$$

y como $u_h\big|_{[c_i, c_{i+1}]}$ es un trozo de recta, no hay otra posibilidad que $u_h = \sum u_h^j \phi_j$.

V_h se llama espacio de elementos finitos de Lagrange P_1.